Théorème de Féjer + Cas des fonctions $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ pm

Leçons : 209, 246

Réf. : Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation p84 (4e édition)

⚠ démo. Thm de ZQ pour le cas L^p de Féjer afin d'éviter de prononcer le terme "probabilité".

Notations : K_N : noyau de Féjer d'ordre N, $S_N(f)$ = série de Fourier de f,
$\sigma_N(f) = f * K_N = \dfrac{S_0(f) + \dots + S_{N-1}(f)}{N}$ et $S(f) = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Th. (Féjer) :

- Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|f - \sigma_N(f)\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$
- $1 \leq p < +\infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|f - \sigma_N(f)\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Application :

Si f est $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ pm, alors $S_N(f)$ converge normalement et $S(f) = f$.

Th. de Féjer

1) Cas $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$

a°/ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f*K_N(x) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t)\,dt - f(x) \times \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt}^{=\|K_N\|_1 = 1} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\, K_N(t)\,dt \qquad K_N \geq 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc unif^t continue (Heine) donc :

$$\exists\, \pi \geq \delta > 0 \mid \forall\, t \in [-\pi, \pi],\ |t| \leq \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

inégalité triangulaire

Donc

$$|f*K_N(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x-t)-f(x)|K_N(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]^c}\left(|f(x-t)|+|f(x)|\right)K_N(t)\,dt$$

$$|f*K_N(x)-f(x)| \leq \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}K_N(t)\,dt}_{\leq \|K_N\|_1 = 1} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{[-\delta,\delta]^c}K_N(t)\,dt \quad (*)$$

indépendant de x

$$\|f*K_N-f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\underbrace{\int_{[-\delta,\delta]^c}K_N(t)\,dt}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$$

car K_N est une approximation de l'unité

donc $\limsup_N \|f*K_N-f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

donc $\limsup \|f*K_N-f\|_\infty = 0$ donc $\boxed{\|f*K_N-f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$

2) Cas $f\in L^p(\mathbb{T})$ $(1\leq p<+\infty)$

a) $$\|\sigma_N(f)\|_p^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_N(t)\,dt\right|^p dx$$

$q\in[1,+\infty]$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|f(x-t)|\,K_N^{1/p}(t)}_{\in L^p(\mathbb{T})}\times\underbrace{K_N^{1/q}(t)}_{\in L^q(\mathbb{T})}\,dt\right)^p dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^pK_N(t)\,dt\right)^{1/p}\times\underbrace{\|K_N\|_1^{1/q}}_{=1}\right)^p dx$$

Fubini Tonelli

$$(*) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|^p\,dx\right)}_{=\|f\|_p^p}\,dt$$

par invariance de la mesure de Lebesgue par translation

$$\|\sigma_N(f)\|_p^p \leq \|f\|_p^p \times \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1}$$

donc $\boxed{\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p}$

(A)

2) b°/ On utilise 1) b°/ et 2) a°/ pour limiter le nombre d'étapes

$$\| f * K_N - f \|_p^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(x-t) - f(x) | K_N(t)\, dt \right)^{1/p} dx$$

et on passe directement à l'étape (*)

$$\| f * K_N - f \|_p^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| \tau_t f - f \|_p^p \, K_N(t)\, dt$$

où $\tau_t f : x \mapsto f(x-t)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

. Par continuité des translations dans L^p $(1 \leq p < +\infty)$,

$\exists\, \delta \geq 0$ tq $|t| \leq \delta \Rightarrow \| \tau_t f - f \|_p \leq \varepsilon$

. $\forall t \in \mathbb{R}$, $\| \tau_t f \|_p = \| f \|_p$ par invariance de la mes. de Lebesgue par translation, donc $\| \tau_t f - f \|_p \leq \| \tau_t f \|_p + \| f \|_p$

$$\| \tau_t f - f \|_p \leq 2 \| f \|_p$$

D'où :

$$\| f * K_N - f \|_p^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]} \| \tau_t f - f \|_p^p K_N(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]^c} \| \tau_t f - f \|_p^p K_N(t)\, dt$$

idem (*)

$$\| f * K_N - f \|_p^p \leq \varepsilon^p + \frac{2^p \| f \|_p^p}{2\pi} \int_{[-\delta,\delta]^c} K_N(t)\, dt$$

donc $\limsup \| f * K_N - f \|_p^p \leq \varepsilon^p$

donc (idem 1) b°/) $\| f * K_N - f \|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Appli : Cas des fonctions $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ pm

Rq : Cette application n'a de sens que si on admet les ii), iii) et iv) du Théorème II.3 p 85 du Zuily-Queffélec, i.e :

ii) Si $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N]{} \ell$ et f continue en x_0, alors $\ell = f(x_0)$

iii) Si $S_N(f)$ CVU, alors $f = S(f)$

iv) Cas $f \in L^2(\mathbb{T})$ (Parseval, ...)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et $f \in \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{T})$.

On veut m.q. $S_N(f)$ CVN, soit $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|$ cv.

$f' \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{T})$ donc $f \in L^2(\mathbb{T})$

et $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

On a donc pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)| = |c_0(f)| + \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \frac{1}{n} |c_n(f')|$$

Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{2N}$

$$\leq |c_0(f)| + \left(2 \times \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f')|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|_2$$

Parseval

$< +\infty$

donc $\boxed{S_N(f) \text{ CVN donc CVU dans } S(f) = f}$.